

Научная статья

УДК 630.568

doi: 10.34655/bgsha.2024.76.3.012

### Метод сглаживающих сплайнов для графической интерпретации модели хода роста

Елена Евгеньевна Иванова<sup>1</sup>, Николай Алексеевич Бабич<sup>2</sup>,

Наталья Александровна Служева<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Архангельск, Россия.

Автор, ответственный за переписку: Иванова Елена Евгеньевна, e.e.ivanova@narfu.ru

**Аннотация.** В настоящей статье обсуждается методика подбора сглаживающей сплайн-функции для построения графиков хода роста посадок сосны обыкновенной таежного района европейского Севера России. Экспериментальным материалом послужили данные, собранные на постоянных и временных площадях заложенных в лесхозах и лесничествах Архангельской и Вологодской областей. Обследованим охвачены лесные культуры сосны обыкновенной в черничном типе условий произрастания, созданных методом посадки. В результате проведенных таксационных работ полученные данные сформированы в матрицу значений, где каждому значению высоты соответствует возраст культур. На основе экспериментальных данных ранее авторами получены математические модели хода роста, которые представляют собой систему сигмоидных уравнений. Системы уравнений, описывающие динамику роста в высоту, состоят из уравнения Вейбулла, Теразаки и логистического уравнения, относящихся к классу сигмоидных функций, применяемых для описания биологического роста. Полученные модели хода роста в высоту, учитывающие фазы роста и развития, представлены кусочно-гладкой функцией. Графическая интерпретация кусочно-гладкой функции имеет точки разрыва между временными интервалами фаз роста и развития. Предлагаемые кубические сплайн-функции позволяют получить адекватные данные хода роста посадок сосны в точках разрыва модели роста, учитывающей фазы роста и развития культур, без потери экспериментальных данных. Целью исследования стал поиск сглаживающей сплайн-функции для построения графической интерпретации модели хода роста посадок культур сосны обыкновенной, учитывающей фазы роста и развития. Проведенное исследование показывает, что оптимальной сплайн-функцией для сглаживания экспериментальных данных может служить полином третьей степени. Рекомендуемый метод сглаживания интервалов в промежуточных точках графика функции хода роста позволяет получить графическую интерпретацию модели хода роста в высоту без потери данных высоты в точках разрыва.

**Ключевые слова:** метод интерполяции, сглаживание сплайнами, математическое моделирование, модель хода роста, сосна обыкновенная, динамика роста, регрессионный анализ, статистическая обработка данных, европейский Север России, подзоны тайги.

Original article

## The method of smoothing splines for graphical interpretation of growth course models

Elena E. Ivanova<sup>1</sup>, Nikolai A. Babich<sup>2</sup>, Natalia A. Sluzova<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,

Corresponding author: Elena E. Ivanova e.e.ivanova@narfu.ru.

**Abstract.** The article deals with the methodology of selecting of a smoothing spline function for plotting the growth course graphs of Scots pine crops in the taiga region of the European North of Russia. Data collected on permanent and temporary areas laid out in forestry enterprises and forestry departments of the Arkhangelsk and Vologda regions was used as the experimental material. The survey covered forest crops of Scots pine in the blueberry type of growing conditions that had been created by the planting method. As the result of the performed taxation work, the obtained data was formed into a matrix of values, where each value of height corresponds to the age of crops. Based on the experimental data, the authors previously obtained mathematical models of growth, that represent a system of sigmoid equations. The systems of equations describing the dynamics of height growth of Scots pine consist of the Weibull equation, Terazaki equation and the logistic equation that belong to the class of sigmoid functions that are used to describe biological growth. The obtained models of growth of height of Scots pine take into account the phases of growth and development and represent a piecewise smooth function. The graphical interpretation of a piecewise smooth function has breakpoints between the time intervals of the growth and development phases. The suggested cubic spline functions allow us to obtain proper data of the growth course of Scots pine plantings at the break points of the growth model, taking into account the phases of growth and development of Scots pine crops, without loss of experimental data. The aim of the study was the search for a smoothing spline function for plotting a model of the growth course of Scots pine crops, taking into account the phases of growth and development. The conducted research shows that the optimal spline function for smoothing of experimental data can be a third-order polynomial. The recommended method of smoothing of intervals at intermediate points of the graph of the growth rate function allows us to obtain a graphical interpretation of the model of the growth rate in height without losing height data at the break points.

**Keywords:** interpolation method, spline smoothing, mathematical modeling, growth course model, Scots pine, growth dynamics, regression analysis, statistical data processing, European North of Russia, taiga subzones.

**Введение.** Освоение лесных ресурсов в последние десятилетия набирает существенные обороты и в первую очередь из-за изменения технологий обработки древесины и расширения спектра применения вторичных отходов деревообработки. Но вопрос сохранения и рационального использования лесов в интересах экономики, а также реализация комплекса мер по лесовосстановлению, остается одной из важных тем, в том числе в политике государства. Площади ежегодного выбытия лесов значительно превышают объемы лесовосстановления, несмотря на перевыполнение показателей по федеральному проекту «Сохранение лесов», который включает мероприятия

по восстановлению вырубленных и погибших лесных насаждений [1]. Отсутствие актуальной информации о лесах, учета природных особенностей районов для лесовосстановления, влияющих на специфику скорости роста посадочного материала, а также его приживаемость и выживаемость, все это существенным образом влияет на результат мероприятий по воспроизводству лесов. Актуальность проводимого исследования обусловлена необходимостью изучения функциональных зависимостей для описания динамики роста древостоя, которые могут быть основой для моделирования продуктивности лесных насаждений [2].

Изучение динамики роста древостоев

основывается на различных подходах [3, 4, 5]. Как правило, в описание модели хода роста насаждения закладывается функциональная зависимость, представленная в виде таблицы значений таксационных показателей относительно возраста или другой таксационной характеристики, либо изображаемая в виде графика функции, описывающего динамику, либо в виде математической формулы. Однако, таблицы хода роста полных и модельных древостоев, классифицированные по классам бонитета и типам леса, относящиеся к моделям динамики состояния древостоя в статике, не способны отражать процесс развития насаждения целиком [6]. Для моделирования процесса развития древостоя необходим учет фаз роста и развития насаждения [6].

Дифференциацию культур по фазам роста и развития сформулировал Н.П. Кобранов в 1930 году, установив примерную длительность фаз роста и развития для культивируемых пород, а также выделил отдельно фазы производства культур и их приживания. Сегодня существуют различные подходы к дифференциации древостоев, созданных искусственным путем, по фазам роста и развития. Позже М.Д. Мерзленко и Н.А. Бабич в работе «Теория и практика выращивания сосны и ели в культурах» уточнили временные интервалы фаз роста и развития для культур.

В результате моделирования хода роста культур в высоту с учетом фаз роста и развития математическая зависимость может быть представлена в виде кусочно-гладкой функции, графическая интерпретация которой может иметь точки разрыва между временными интервалами в фазах роста и развития [7]. Для получения гладкой аппроксимирующей

кривой роста используются инструменты вычислительной математики, такие как интерполяция. Сущность интерполяции состоит в определении значения функции в различных промежуточных точках относительно полученных экспериментальных данных. К одному из методов интерполяции относятся сглаживающие сплайны. В вычислительной математике сплайны позволяют решать задачи сглаживания экспериментальных данных, имеющих сложную структуру [8, 9, 10, 11, 12, 13].

**Целью** настоящей работы является подбор сглаживающих сплайнов для построения графической интерпретации модели хода роста посадок культур сосны обыкновенной, учитывающей фазы роста и развития.

**Объекты, материалы и методы.** Объектом исследования являлись посадки сосны обыкновенной, произрастающей в черничном типе леса северной, средней и южной подзон тайги европейского Севера России.

Для получения достоверных результатов исследования использовались данные, собранные на 73 пробных площадях. Камеральная обработка полученных данных производилась на основании методических указаний Н.В. Соколова, а также с учетом ОСТа 56-69-83 и полевого справочника таксатора для таежных лесов европейского Севера. На каждой пробной площади фиксировались таксационные показатели - возраст и средняя высота. Для обоснования модели хода роста использовали более 600 исходных точки, полученных в результате проведения авторских натурных исследований и обобщения архивных данных кафедры ландшафтной архитектуры и искусственных лесов САФУ имени М.В. Ломоносова, а также литературных данных (табл. 1).

**Таблица 1** – Распределение исходных точек посадок сосны обыкновенной по подзонам тайги европейского Севера России

Подзона тайги	Количество координатных точек, шт.
Северная	113
Средняя	405
Южная	102

По каждой пробной площади составлялась матрица исходных данных, в которой значения высоты соотнесены с соответствующими значениями возраста культур сосны. Таким образом, исходные координатные точки имеют взаимно однозначное соответствие между высотой культур и их возрастом.

В качестве аппроксимированной кривой хода роста отобрано 8 сигмоидных уравнений:

- уравнение Гомперца –

$$y = ae^{-be^{-cx}},$$

- логистическое уравнение –

$$y = \frac{a}{1+be^{-cx}},$$

- уравнение Вейбулла –

$$y = a - be^{-cx^d},$$

- уравнение Ричардса –

$$y = \frac{a}{(1+e^{b-cx})^{\frac{1}{d}}},$$

- уравнение Шумахера –

$$y = ae^{-\frac{b}{x^c}},$$

- уравнение Дракина-Вуевского –

$$y = a(1 - e^{-bx})^c,$$

- уравнение Коллера –

$$y = ax^b e^{-cx},$$

- уравнение Теразаки –

$$y = ae^{-\frac{b}{x}}.$$

Подбор моделей хода роста по высоте осуществляется в два этапа. На первом этапе производился анализ отобранных сигмоидных моделей хода роста. С помощью программы «CurveExpert Professional 2.4.0» осуществлялся расчет параметров моделей хода роста. Точность аппроксимирующих моделей хода роста устанавливалась на основе стандартной ошибки и коэффициента детерминации. Успешной считалась модель, которая соответствовала следующим требованиям:

- модель объясняет не менее 90 % вариаций зависимости переменной, т. е.  $R^2 > 0,9$ ;

- стандартная ошибка оценки модели должна иметь минимальное отклонение от линии регрессии, т. е.  $S < 1$ .

Далее на основе полученных параметров аппроксимирующих моделей были предложены прогнозные модели хода роста культур до 100 лет. На втором этапе осуществлялся сравнительный анализ данных высоты в соответствующих фазах роста и развития прогнозных моделей с экспериментальными данными по фазам роста и развития культур. На основе сравнительного анализа сделан отбор прогнозных моделей, оценки надежности которых удовлетворяют успешности модели.

Полученная нами ранее модель хода роста посадок сосны обыкновенной, произрастающей в северной подзоне тайги европейского Севера России, также представлена системой сигмоидных уравнений [7], учитывающей фазы роста и развития культур. Уточненная в связи с расширением диапазона исходных данных на пробных площадях и увеличением прогнозного периода до возраста рубки (100 лет) модель представляет собой кусочно-гладкую кривую:

$$H(t) = \begin{cases} 3,87 - 3,69e^{-0,0005t^{2,87}}, & 1 \leq t \leq 3 \\ 95,71e^{-\frac{10,35}{t^{0,38}}}, & 4 \leq t \leq 15 \\ 3,87 - 3,69e^{-0,0005t^{2,87}}, & 16 \leq t \leq 25 \\ 154,002 - 155,09e^{-0,0006t^{1,3}}, & 26 \leq t \leq 60 \\ \frac{20,78}{1+28,93e^{-0,09t}}, & 61 \leq t \leq 100 \end{cases},$$

где  $t$  – возраст древостоя,  $H(t)$  – высота древостоя.

Исследование представленной модели, в том числе ее графической интерпретации, позволяет сделать вывод, что кусочно-заданная функция имеет точки разрыва на интервалах при  $t \in (3; 4) \cup (15; 16) \cup (25; 26) \cup (60; 61)$ .

Отметим, что естественный физиологический рост любого организма является непрерывным, в крайнем случае, имеет периоды стагнации, после которых наблюдается новая фаза роста или гибель. Другими словами, для углубленного изучения хода роста древостоя или оценки прогнозных значений необходимо, чтобы построенная модель была непрерывной. Одним из оптимальных методов сглаживания кусочно-заданных

функций без потери исходных данных является сглаживание сплайнами.

Регрессионный анализ результатов массовых измерений и перерасчетов культур в подзонах тайги европейского Севера позволил установить характерные взаимосвязи между исследуемыми параметрами (высота древостоя от возраста), а статистический анализ – аналитический вид функциональных зависимостей на каждой фазе роста и развития культур. Показано, что высота древостоя зависит от его возраста, с учетом территории высадки и для посадок сосны средней и южной подзон тайги получены следующие сигмоидные модели хода роста:

– посадки средней подзоны тайги

$$H(t) = \begin{cases} 18,13 - 18,04e^{-0,0009t^{1,94}}, & 1 \leq t \leq 10 \\ \frac{13,55}{1+31,33e^{-0,14t}}, & 11 \leq t \leq 15 \\ 27,85e^{-\frac{33,01}{t}}, & 16 \leq t \leq 20 \\ 20,38 - 24,48e^{-0,005t^{1,51}}, & 21 \leq t \leq 40 \\ 36,9e^{-\frac{33,98}{t}}, & 41 \leq t \leq 100 \end{cases},$$

– посадки южной подзоны тайги

$$H(t) = \begin{cases} \frac{10,47}{1+28,07e^{-0,17t}}, & 1 \leq t \leq 3 \\ 10,14 - 9,28e^{-0,0001t^{2,91}}, & 4 \leq t \leq 10 \\ 18,86e^{-\frac{23,99}{t}}, & 11 \leq t \leq 15 \\ 10,14 - 9,28e^{-0,0001t^{2,91}}, & 16 \leq t \leq 20, \\ \frac{10,47}{1+28,07e^{-0,17t}}, & 21 \leq t \leq 25 \\ 18,86e^{-\frac{23,99}{t}}, & 26 \leq t \leq 40 \\ 44,46e^{-\frac{54,74}{t}}, & 41 \leq t \leq 100 \end{cases},$$

где  $t$  – возраст древостоя,  $H(t)$  – высота древостоя.

В качестве рабочей гипотезы было выдвинуто предположение о том, что интерполяция сплайнами для сглаживания графика функции хода роста является оптимальной функцией, поскольку позволяет минимизировать потерю экспериментальных данных в точках разрыва, возникающих при учете фаз роста и развития в результате моделирования динамики роста. Исследовательская гипотеза основывалась на том, что, исходя из графического отображения статистических данных, модель хода роста сосны обык-

новенной представляет собой кусочно-гладкую кривую, которую невозможно использовать в дальнейшем для построения прогноза из-за точек разрыва, соответствующих длине возрастных интервалов исследуемой популяции при проекции их на ось временной шкалы. Для доказательства выдвинутой гипотезы был проведен анализ многолетних данных материалов лесоустройства на пробных площадях. По результатам анализа установлено, что динамика роста в высоту, в общем случае, описывается семейством сигмоидных кривых. Также, если зависимости имеют нелинейный характер, то их аппроксимируют по участкам.

Для определения степени сглаживающего алгебраического полинома был применен метод регрессионного анализа, оценка которого проводилась по полиномиальной аппроксимирующей кривой или линии тренда двух степеней:

- квадратичной параболы

$$y(x) = a_1x^2 + b_1x;$$

- кубической параболы

$$y(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x;$$

где  $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$  – коэффициенты полиномиальной аппроксимирующей кривой,  $x$  – значение возраста (лет) аппроксимируемой  $y(x)$  – высоты (м) исследуемых культур сосны.

Выбор лучшего сглаживающего сплайна второй или третьей степени осуществлялся исходя из статистических оценок, полученных в ходе регрессионного анализа. Оценивались коэффициент детерминации ( $R^2$ ), сумма квадратов регрессии ( $SSR$ ), а также F-критерий ( $F$ ). Коэффициент детерминации позволил оценить качество сглаживающего сплайна, т.е. определить статистическую меру соответствия созданной модели исходным данным, на которых она построена. Дисперсия остатков регрессии ( $SSR$ ) также позволяет установить качество регрессионной модели, так как ее физический смысл заключается в нахождении суммы квадратов разниц между фактическими и

предсказанными регрессией значениями зависимой переменной. Другими словами, чем меньше значение  $SSR$ , тем лучше модель отражает исходные данные модели хода роста в высоту. Адекватным считался алгебраический полином, который одновременно удовлетворял следующим условиям:

- коэффициент детерминации ( $R^2$ ) имел наибольшее значение;
- сумма квадратов регрессии ( $SSR$ ) имела наименьшее значение;
- расчетное значение – критерий ( $F$ ), полученное в результате регрессионного анализа, больше табличного значения критерия Фишера.

Следующим шагом определялись коэффициенты сглаживающей кубической сплайн-функции –  $S(x) = A + B(x - x_i) + C(x - x_i)^2 + D(x - x_i)^3$ , где  $A, B, C, D$  – коэффициенты сплайн-функции,  $x_i$  – значение из множества (3; 4) ∪ (15; 16) ∪ (25; 26) ∪ (60; 61) – для посадок сосны северной подзоны тайги,

из множества (10; 11) ∪ (15; 16) ∪ (20; 21) ∪ (40; 41) – для посадок средней подзоны тайги, из множества (3; 4) ∪ (10; 11) ∪ (15; 16) ∪ (20; 21) ∪ (25; 26) ∪ (40; 41) – для посадок южной подзоны тайги. При помощи найденного сплайна для каждой подзоны тайги строились графики модели хода роста в высоту в точках разрыва.

Для выполнения аналитических расчетов была сформирована в MS Excel база данных, которая позволила, применяя соответствующий инструментарий, провести статистический и регрессионный анализ.

**Результаты и обсуждения.** При аппроксимации исходных данных модели хода роста в высоту посадок сосны полиномиальными аппроксимирующими кривыми второй и третьей степени получены статистические оценки результатов регрессионного анализа, которые представлены в таблице 2.

**Таблица 2** – Статистика результатов регрессионного анализа полиномиальной аппроксимирующей кривой

Подзона тайги посадок сосны	Уравнение полиномиальной аппроксимирующей кривой	$R^2$	$F_{расч}$	$F_{табл}$	$SSR$
Северная	$y(x) = -0,0007x^2 + 0,305x$	0,9485	1823,33	3,95	4769,66
	$y(x) = 0,00006x^3 + 0,0076x^2 + 0,053x$	0,9922	12593,31	3,95	6566,82
Средняя	$y(x) = -0,0014x^2 + 0,4104x$	0,9745	3783,35	3,95	6391,41
	$y(x) = -0,00004x^3 + 0,0045x^2 + 0,2342x$	0,9903	10107,19	3,95	9149,58
Южная	$y(x) = 0,0004x^2 + 0,3111x$	0,9929	13425,13	3,95	10237,33
	$y(x) = -0,00002x^3 + 0,0027x^2 + 0,2142x$	0,9983	56374,59	3,95	7645,09

Для всех посадок сосны различных подзон тайги коэффициент детерминации ( $R^2$ ) полиномиальной аппроксимирующей кривой третьей степени имеет более высокое значение, которое варьируется в пределах 99 %, в сравнении со значением коэффициента детерминации полиномиальной аппроксимирующей кривой второй степени. Исходя из данного сравнения, можно сделать вывод о том, что доля дисперсии зависимой переменной в поли-

номиальной модели третьей степени ниже, чем в полиномиальной модели второй степени. Для проверки значимости построенных полиномиальных аппроксимирующих моделей был применен критерий Фишера ( $F$ -критерий). При выбранном уровне значимости (0,05) для всех моделей, вне зависимости от подзоны тайги, рассчитанный критерий Фишера ( $F_{расч}$ ) выше, чем табличный ( $F_{табл}$ ), что гово-

рит о значимости всех построенных моделей. Исходя из анализа статистики регрессионного анализа следует, что аппроксимация исходных данных по модели хода роста полиномом третьей степени будет значительно лучше, чем полиномом вто-

рой степени. Для подтверждения данного вывода была выполнена графическая визуализация аппроксимации исходных данных по модели хода роста алгебраическими полиномами второй и третьей степени, представленная на рисунке 1.

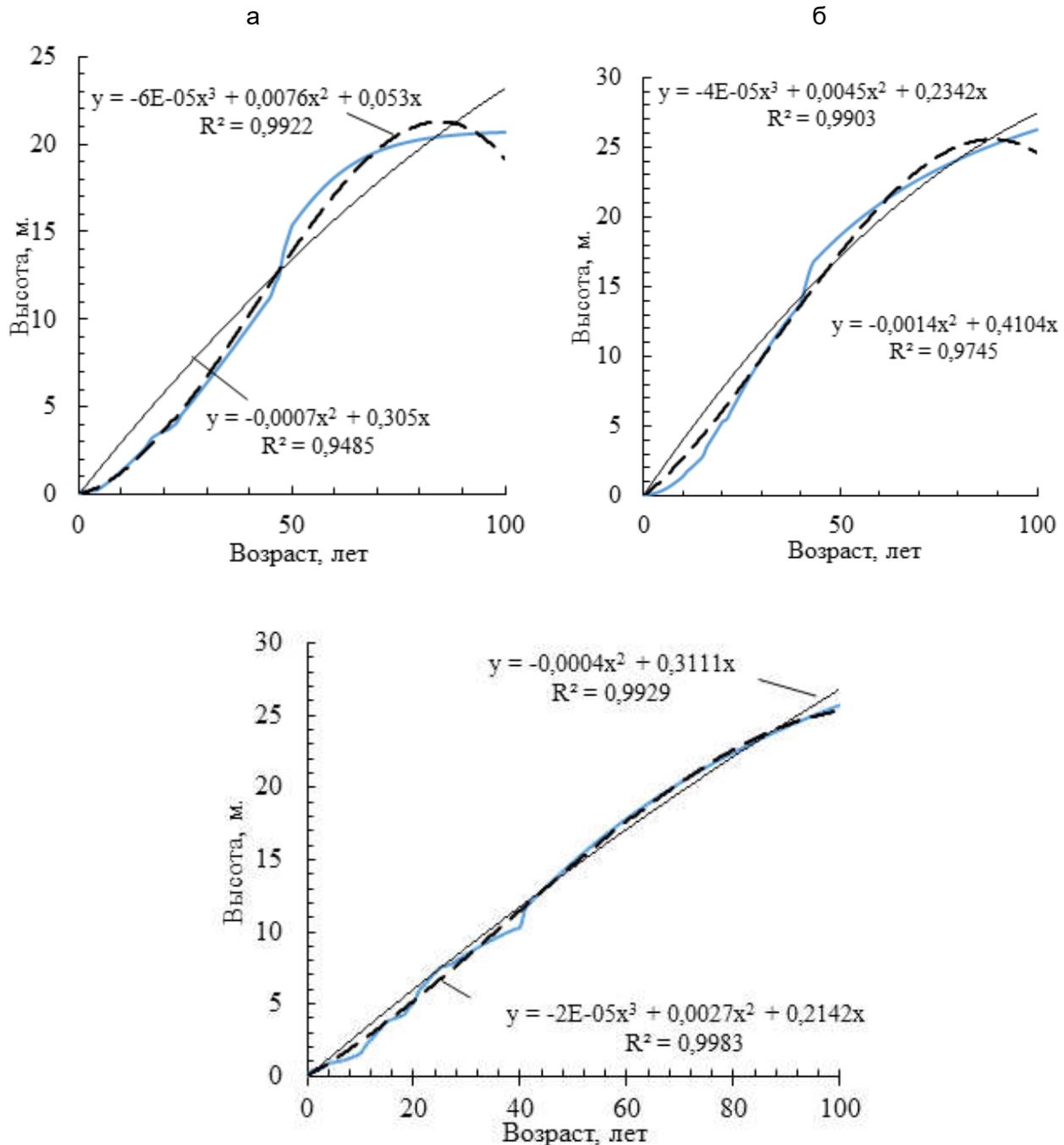


Рисунок 1. Графики полиномиальных аппроксимирующих кривых относительно модели хода роста посадок сосны (синяя линия – данные хода роста по исходной модели, черная линия – полиномиальная аппроксимирующая кривая второй степени, пунктирная линия – полиномиальная аппроксимирующая кривая третьей степени): а) северной подзоны тайги, б) средней подзоны тайги, в) южной подзоны тайги

Анализ графически представленных результатов подтверждает вывод о том, что при аппроксимации алгебраическим полиномом третьей степени наблюдаются незначительные отклонения от графика функции, построенного на основе модели хода роста в высоту посадок сосны. Отметим, что использование для аппроксимации данных полиномов более высокой степени не является целесообразным, несмотря на получение более высокого значения коэффициента детерминации. В этом случае целесообразнее использо-

вать модели, в основе которых лежат дифференциальные уравнения, так как они позволяют более точно описать динамику численности (биомассы) популяции.

Исходя из результатов регрессионного анализа для сглаживания графика функции, полученной на основе исходных данных модели хода роста в высоту для посадок сосны тайги европейского Севера России, в точках разрыва использовалась кубическая сплайн-функция, общий вид которой определяется выражением:

$$S(x) = A + B(x - x_i) + C(x - x_i)^2 + D(x - x_i)^3,$$

где  $A, B, C, D$  – коэффициенты сплайн-функции,  $x_i$  – значение функции из промежутка разрыва.

Коэффициенты кубических сплайн-

функций для каждого промежутка разрыва моделей хода роста в высоту посадок сосны тайги европейского Севера России представлены в таблице 3.

**Таблица 3** – Коэффициенты сглаживающих кубических сплайн-функций

Подзона тайги	Промежуток разрыва модели хода роста в высоту	$A$	$B$	$C$	$D$
Северная	(3; 4)	0,2288	0,0689	0	-0,0003
	(15; 16)	2,4897	0,5178	0,0465	-0,0754
	(25; 26)	3,8503	1,1396	0,2637	-0,1202
	(60; 61)	16,584	1,6892	0,1081	-0,072
Средняя	(10; 11)	1,4361	1,0011	0	-1,201
	(15; 16)	2,8688	0,4505	0,3697	-0,1503
	(20; 21)	5,3462	0,2027	-0,0528	-0,0016
	(40; 41)	13,8227	2,2271	0,1701	-0,1134
Южная	(3; 4)	0,5881	0,3579	0	-0,0346
	(10; 11)	1,5865	0,4523	0,1369	-0,0459
	(15; 16)	3,81	0,0865	-0,1247	0,0408
	(20; 21)	5,119	0,787	0,1196	-0,1221
	(25; 26)	7,5315	0,1591	-0,0617	0,0191
	(40; 41)	10,3529	1,3766	-0,0929	0,0619

Для всех рассматриваемых промежутков разрыва моделей хода роста в высоту посадок сосны значения высоты в этих промежутках удовлетворяет требованию о том, что слева от промежутка

разрыва значение высоты должно быть больше, а справа меньше (табл. 4).

Графики кривой хода роста в высоту посадок сосны в зависимости от подзон тайги представлены на рисунках 2-4.

**Таблица 4** – Значения высот в промежутках разрыва и вне промежутков разрыва для различных подзон тайги посадок сосны

Подзона тайги посадок сосны	Промежуток разрыва модели хода роста в высоту	Значение высоты по модели слева от промежутка разрыва, $H(t_i)$	Значение высоты в промежутке разрыва, $S(x)$	Значение высоты по модели справа от промежутка разрыва, $H(t_{i-1})$
Северная	(3; 4)	$H(3) = 0,2288$	$S(3,5) = 0,2632$	$H(5) = 0,3646$
	(15; 16)	$H(15) = 2,4897$	$S(15,5) = 2,7508$	$H(16) = 2,9786$
	(25; 26)	$H(25) = 3,8503$	$S(25,5) = 4,471$	$H(26) = 5,1334$
	(60; 61)	$H(60) = 16,5839$	$S(60,5) = 17,4465$	$H(61) = 18,3091$
Средняя	(10; 11)	$H(10) = 1,4361$	$S(10,5) = 1,7865$	$H(11) = 1,7898$
	(15; 16)	$H(15) = 2,8688$	$S(15,5) = 3,1677$	$H(16) = 3,5387$
	(20; 21)	$H(20) = 5,3462$	$S(20,5) = 5,4342$	$H(21) = 5,4944$
	(40; 41)	$H(40) = 13,8227$	$S(40,5) = 14,9646$	$H(41) = 16,1065$
Южная	(3; 4)	$H(3) = 0,5881$	$S(3,5) = 0,7627$	$H(4) = 0,9114$
	(10; 11)	$H(10) = 1,5865$	$S(10,5) = 1,8411$	$H(11) = 2,1298$
	(15; 16)	$H(15) = 3,8101$	$S(15,5) = 3,8272$	$H(18) = 4,2342$
	(20; 21)	$H(20) = 5,1190$	$S(20,5) = 5,5271$	$H(21) = 5,9035$
	(25; 26)	$H(25) = 7,5315$	$S(25,5) = 7,5980$	$H(27) = 7,7562$
	(40; 41)	$H(40) = 10,3529$	$S(40,5) = 11,0257$	$H(41) = 11,6985$

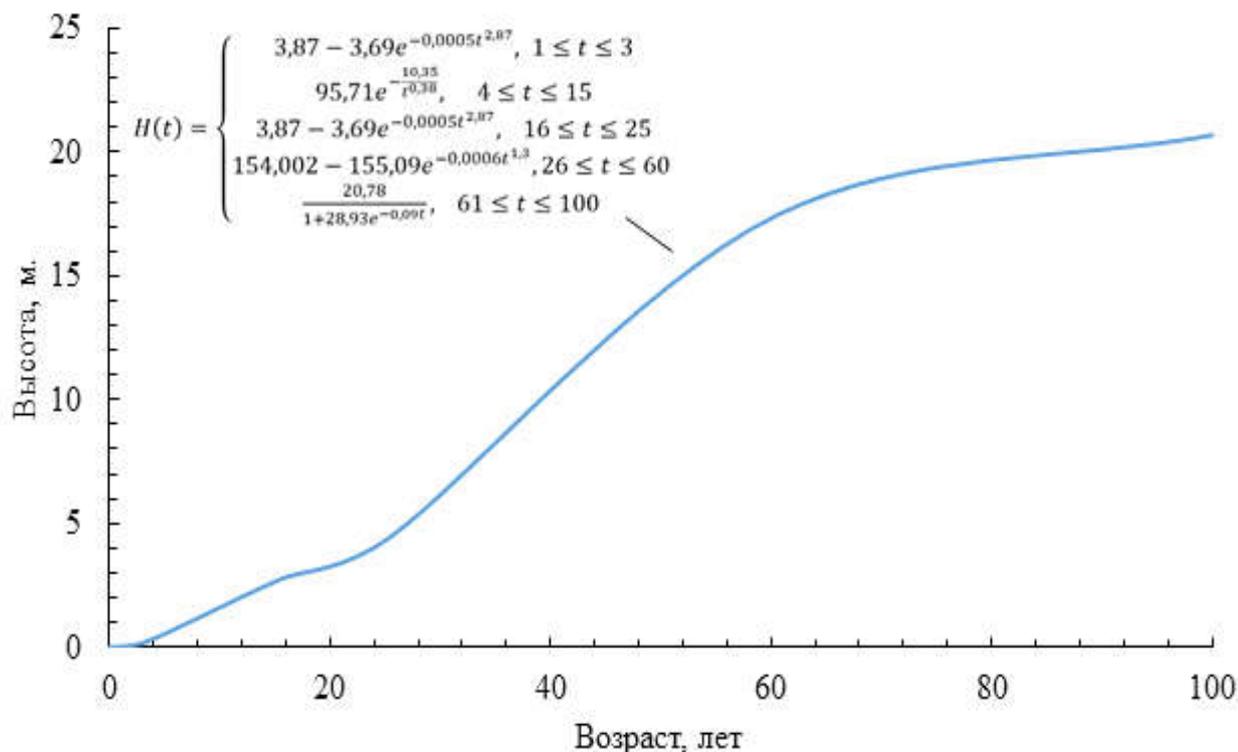


Рисунок 2. Кривая хода роста в высоту посадок сосны северной подзоны тайги

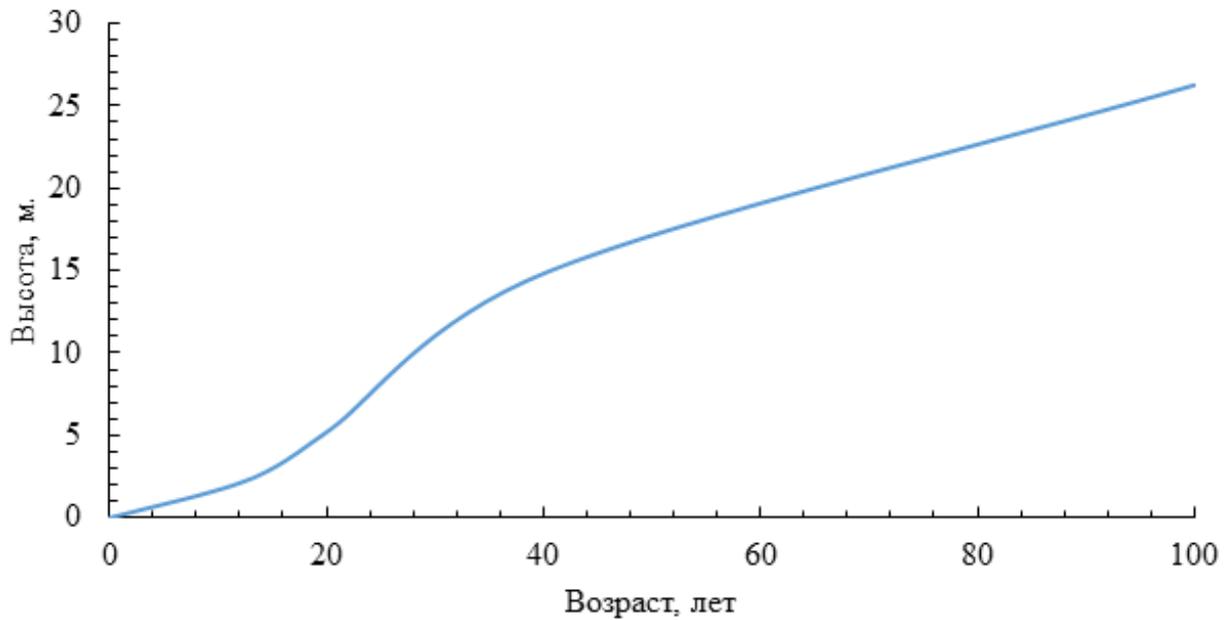


Рисунок 3. Кривая хода роста в высоту посадок сосны средней подзоны тайги

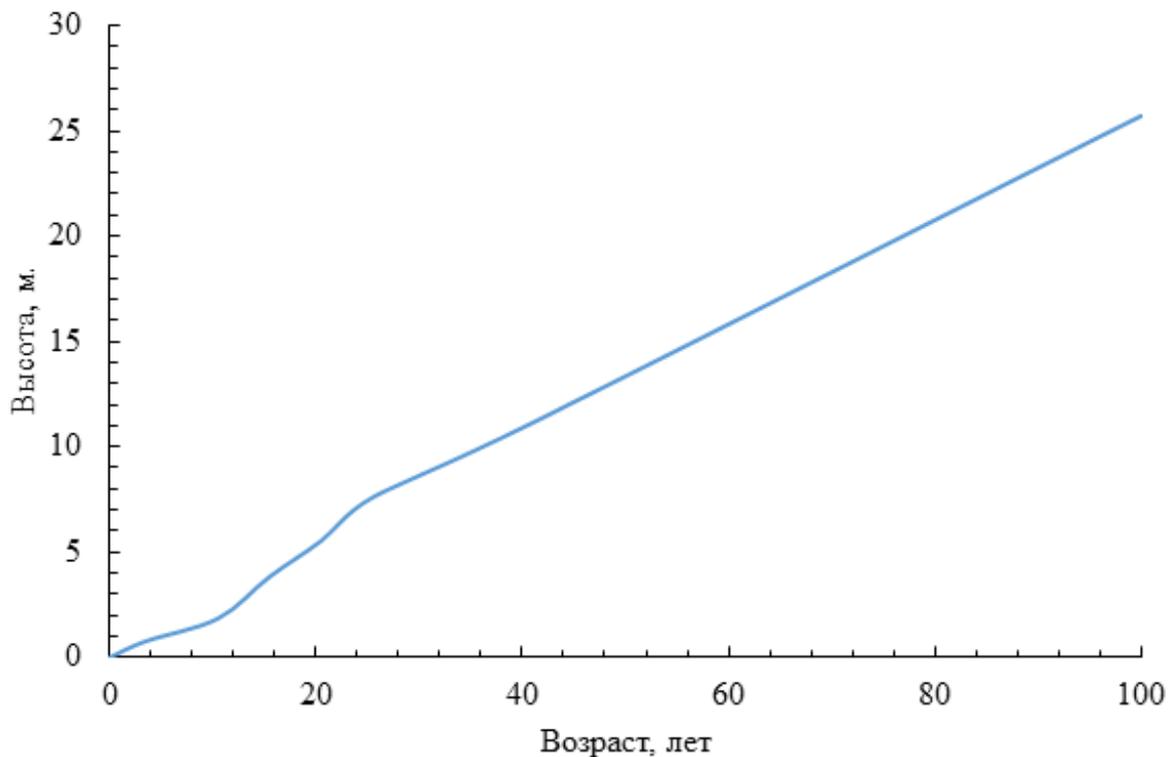


Рисунок 4. Кривая хода роста в высоту посадок сосны южной подзоны тайги

Очевидно, что сглаженная кубическими сплайн-функциями кривая роста имеет форму сигмоидной кривой и может быть также представлена в виде логистической функции, которая является решением простого дифференциального уравнения первого порядка типа

$$\frac{dx}{dt} = K(1 - K).$$

Апробированный в ходе настоящего исследования и реализованный в среде MS Excel метод подбора сглаживающей сплайн-функции для описания хода роста в высоту посадок сосны для различных подзон тайги может быть автоматизирован при помощи VBA (Visual Basic for Applications), который является упрощенной версией Visual Basic, встроенной во

множество продуктов линейки Microsoft Office. Техническая составляющая данного научного исследования в дальнейшем будет заключаться в разработке расчетного модуля, реализующего алгоритм, позволяющий организовать подбор коэффициентов сглаживающей сплайн-функции, исходя из критерия минимизации суммы квадратов отклонений выбранной функции от исследуемых данных, на основе которых будет построена модель хода роста посадок сосны обыкновенной и представлена ее графическая интерпретация с учетом подзон тайги европейского Севера России.

**Заключение.** Метод подбора сглаживающей сплайн-функции, представленный в данной работе, позволил изобразить графическую интерпретацию хода роста

посадок сосны обыкновенной, произрастающей в таежных районах европейского Севера России, когда модель хода роста представлена кусочно-гладкой функцией, имеющей точки разрыва. Результаты проведенного исследования и полученные расчетные значения, а также результаты аналитической реализации приведенного алгоритма, подтверждают гипотезу о том, что наиболее подходящим алгебраическим полиномом для сглаживания данных в точках разрыва могут быть кубические сплайн-функции. Полученные результаты имеют важное практическое значение, так как предлагаемый метод сглаживания позволяет исключить потерю данных, что является значимым фактом для получения статистически обоснованных и достоверных выводов.

#### Список источников

1. Отчет о результатах контрольного мероприятия «Аудит эффективности мер по воспроизводству лесов в Российской Федерации за период 2019–2020 годов и истекший период 2021 года» от 21 декабря 2021 года // Бюллетень Счетной палаты Российской Федерации. 2022. № 1. Воспроизводство лесов. 144 с.
2. Припутина И.В., Фролова Г.Г., Быховец С.С., Шанин В.Н., Лебедев В.Г., Шестибратов К.А. Моделирование продуктивности лесных плантаций при разных схемах пространственного размещения деревьев // Математическая биология и биоинформатика, 2016. 11:2. С. 245–262. EDN: XSCGJV. doi: 10.17537/2016.11.245.
3. Кузьмичев В.В. Закономерности динамики древостоев: принципы и модели. Новосибирск : Наука, 2013. 208 с.
4. Лисицын В.И., Драпалюк М.В., Матвеев Н.Н. Моделирование динамики хода роста древостоев на основе термодинамического подхода // Известия вузов. Лесной журнал, 2022. Вып. 3. С. 213-225. EDN: YPPQHS. doi: 10.37482/0536-1036-2022-3-213-225.
5. Выводцев Н.В., Бессонова Н.В. Региональные закономерности роста ореха маньчжурского // Вестник Бурятской государственной сельскохозяйственной академии имени В.Р. Филиппова, 2022. № 2 (67). С. 138–145. EDN: AIJXZZ. doi: 10.34655/bgsha.2022.67.2.018.
6. Рогозин М.В., Разин Г.С. Модели динамики и моделирование развития древостоев // Сибирский лесной журнал. 2015. № 2. С. 55–70. EDN: TUNBJX. doi: 10.15372/SJFS20150205.
7. Иванова Е.Е., Бабич Н.А. Сигмоидные функции в моделировании хода роста по высоте культур сосны обыкновенной // Лесной вестник, 2023. Т. 27. № 5. С. 109-116. EDN: CCITRD. doi: 10.18698/2542-1468-2023-5-109-116.
8. Федорук В.А. Повышение эффективности обработки экспериментальных данных при интерполяции кубическими сплайнами с помощью «методики сдвига» // Вестник СиБАДИ, 2018. Том 15, № 2. С. 306-314. EDN: XSDGDJ. doi: 10.26518/2071-7296-2018-2-306-314.
9. Аникин В.И., Аникина О.В., Гущина О.М. Сглаживание данных в Microsoft Excel с использованием полиномиальных сплайнов // Роль науки в современном мире: сборник статей по материалам международной научно-практической конференции. Иркутск: Алескс, 2017. С. 26-28. EDN: YMBTVH.
10. Хаймович И.Н., Клентак Л.С. Усовершенствование методов сглаживания сложных поверхностей с использованием интерполяционных сплайнов // Фундаментальные исследования. 2013. № 10-12. С. 2634-2638. EDN: RQRXAB.
11. Kuželka K, Marušák R. Use of nonparametric regression methods for developing a local stem form model. J. For. Sci. 2014; 60 (11). Pp. 464-471. doi: 10.17221/56/2014-JFS.
12. Bica A.M., Crainic G.C., Curilă S., Curilă M., Opportunities of simulation for stands structure using mathematical models. Research Journal of Agricultural Science, 2017, Vol. 49. Issue 1. Pp. 133-144.
13. Crainic G.C., Curilă M., Curilă S., Supuran A., Bica A.M. Spline Regression Mathematical Model for

Obtaining a Sustainable Management in Young Beech (*Fagus sylvatica* L.) Stands. Preprints 2024, 2024010645. doi: 10.20944/preprints202401.0645.v1.

### References

1. Report on the results of the control event “Audit of the effectiveness of forest reproduction measures in the Russian Federation for the period 2019-2020 and the expired period of 2021” dated December 21, 2021. *Bulletin of the Accounting Chamber of the Russian Federation*. 2022;1. Forest reproduction. 144 p. (In Russ.)
2. Pripulina I.V., Frolova G.G., Bykhovets S.S., Shanin V.N., Lebedev V.G., Shestibratov K.A. Modeling the productivity of forest plantations with different schemes of spatial placement of trees. *Mathematical Biology and Bioinformatics*. 2016;11:2:245-262 (In Russ.). doi: 10.17537/2016.11.245.
3. Kuzmichev V.V. Patterns of tree stand dynamics: principles and models. Novosibirsk. Nauka, 2013. 208 p. (In Russ.)
4. Lisitsyn V.I., Drapalyuk M.V., Matveev N.N. Modeling the Forest Stand Growth Dynamics Based on the Thermodynamic Approach. *Russian Forestry Journal*. 2022;Issue.3:213-225 (In Russ.). doi: 10.37482/0536-1036-2022-3-213-225.
5. Vyvodtsev N.V., Bessonova N.V. Regional growth patterns of the Manchuria Walnut. *Vestnik of Buryat State Academy of Agriculture named after V. Philippov*, 2022;2(67):138-145 (In Russ.). doi: 10.34655/bgsha.2022.67.2.018.
6. Rogozin M.V., Razin G.S. Dynamics models and modeling of tree stand development. *Sibirskij Lesnoj Zurnal (Siberian Journal of Forest Science)*. 2015;2:55–70 (In Russ.). doi: 10.15372/SJFS20150205.
7. Ivanova E.E., Babich N.A. Sigmoid functions in modeling Scots pine growth course in height. *Lesnoy vestnik. Forestry Bulletin*. 2023;vol.27,no.5:109–116 (In Russ.). doi: 10.18698/2542-1468-2023-5-109-116.
8. Fedoruk V.A. Improving the efficiency of experimental data processing at cubic splines' interpolation by “the shift technique”. *Vestnik SibADI*. 2018; vol.15, no.2, continuous issue—60:306-314 (In Russ.). doi: 10.26518/2071-7296-2018-2-306-314.
9. Anikin V.I., Anikina O.V., Gushchina O.M. Smoothing data in Microsoft Excel using polynomial splines. *The role of science in the modern world: a collection of articles based on the materials of the International Scientific and Practical Conference Irkutsk*. 2017:26-28 (In Russ.).
10. Khaimivich I.N. Klentak L.S. Improvement of complex method of smoothing surfaces using interpolation spline. *Fundamental Research*. 2013; no.10, part 12:2634-2638 (In Russ.).
11. Kuželka K, Marušák R. Use of nonparametric regression methods for developing a local stem form model. *J. For. Sci.*. 2014;60(11):464-471. doi: 10.17221/56/2014-JFS.
12. Bica A.M., Crainic G.C., Curilă S., Curilă M., Opportunities of simulation for stands structure using mathematical models. *Research Journal of Agricultural Science*. 2017;Vol.49(Issue 1):133-144.
13. Crainic G.C., Curilă M., Curilă S., Supuran A., Bica A.M. Spline Regression Mathematical Model for Obtaining a Sustainable Management in Young Beech (*Fagus sylvatica* L.) Stands. Preprints 2024, 2024010645. doi: 10.20944/preprints202401.0645.v1.

### Информация об авторах

**Елена Евгеньевна Иванова** – аспирант кафедры ландшафтной архитектуры и искусственных лесов, e.e.ivanova@narfu.ru;

**Николай Алексеевич Бабич** – доктор сельскохозяйственных наук, профессор, профессор кафедры ландшафтной архитектуры и искусственных лесов, n.babich@narfu.ru;

**Наталья Александровна Слузова** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики, n.sluzova@narfu.ru.

### Information about the authors

**Elena E. Ivanova** – Postgraduate student, Chair of Landscape Architecture and Artificial Forests, e.e.ivanova@narfu.ru;

**Nikolai A. Babich** – Doctor of Sciences (Agriculture), Professor, Professor, Chair of Landscape Architecture and Artificial Forests, n.babich@narfu.ru;

**Natalia A. Sluzova** – Candidate of Science (Physical and Mathematical), Associate Professor, Chair of Landscape Architecture and Artificial Forests, n.sluzova@narfu.ru.

Статья поступила в редакцию 05.04.2024; одобрена после рецензирования 19.06.2024; принята к публикации 23.06.2024.

The article was submitted 05.04.2024; approved after reviewing 19.06.2024; accepted for publication 23.06.2024.