федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Бурятская государственная сельскохозяйственная академия имени В.Р. Филиппова»
Агротехнический колледж

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор колледжа
____
«_____»___________20__г.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ОПЦ.07 Математические методы решения прикладных профессиональных задач

Специальность
21.02.19 Землеустройство

Квалификация выпускника
Специалист по землеустройству

Форма обучения
очная, заочная

Составитель ____

Согласовано:

Председатель методической комиссии АТК ____________

«_____» ________________ 20____г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Оценочные материалы (ОМ) для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине ОПЦ.07 Математические методы решения прикладных профессиональных задач разработан в соответствии с рабочей программой, входящей в ОПОП СПО для специальности 21.02.19 Землеустройство. Комплект оценочных средств по дисциплине ОПЦ.07 Математические методы решения прикладных профессиональных задач предназначен для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений поэтапным требованиям образовательной программы, в том числе рабочей программы дисциплины ОПЦ.07 Математические методы решения прикладных профессиональных задач, для оценивания результатов обучения: знаний, умений.

Оценочные материалы по дисциплине ОПЦ.07 Математические методы решения прикладных профессиональных задач включает:

1. Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации в форме зачета:
 - перечень заданий к зачету;
2. Оценочные средства для проведения текущего контроля успеваемости:
 - вопросы для входного контроля;
 - комплект практических заданий;
 - тренинг.

1. ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЕТЕНЦИЙ ФОРМИРУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОПЦ.07 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

<table>
<tr><td colspan="2">ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.</td></tr>
<tr><td>Знать:</td><td>Уметь:</td></tr>
<tr><td>сущность и социальную значимость своей будущей профессии</td><td>проявлять к ней устойчивый интерес</td></tr>
<tr><td colspan="2">ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.</td></tr>
<tr><td>Знать:</td><td>Уметь:</td></tr>
<tr><td>методы и способы выполнения профессиональных задач,</td><td>Организовывать собственную деятельность</td></tr>
</table>

2. ОПИСАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И КРИТЕРИЕВ ОЦЕНИВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ НА РАЗЛИЧНЫХ ЭТАПАХ ИХ ФОРМИРОВАНИЯ.

2.1 Структура фонда оценочных средств для промежуточной аттестации и текущего контроля

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Темы дисциплины</th><th>Код компетенции</th><th>Форма контроля</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Промежуточная аттестация</td><td>ОК 01. – 02.</td><td>Зачет</td></tr>
<tr><td colspan="4">Раздел 1. Линейная алгебра</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Тема 1.1 Матрицы и определители</td><td>ОК 01. – 02.</td><td>Вопросы для входного контроля
Тренинг
Комплект практических заданий</td></tr>
<tr><td colspan="4">Раздел 2. Теория комплексных чисел</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Тема 2.1 Действия над комплексными числами</td><td>ОК 01. – 02.</td><td>Вопросы для входного контроля
Тренинг
Комплект практических заданий</td></tr>
<tr><td colspan="4">Раздел 3. Математический анализ. Дифференциальное исчисление. Интегральное исчисление</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Тема 3.1 Виды и свойства функций.</td><td>ОК 01. – 02.</td><td>Вопросы для входного контроля
Комплект практических заданий</td></tr>
<tr><td colspan="4">Раздел 4. Основы теории вероятностей и математической статистики. Дискретная математика</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Теория вероятности. Булевы алгебры</td><td>ОК 01. – 02.</td><td>Вопросы для входного контроля
Комплект практических заданий</td></tr>
</table>

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Требования к результатам освоения дисциплины

<table>
<tr><th rowspan="2">№ п/п</th><th rowspan="2">Индекс компетенции</th><th rowspan="2">Содержание компетенции (или ее части)</th><th colspan="2">В результате изучения дисциплины обучающиеся должны:</th></tr>
<tr><th>знать</th><th>уметь</th></tr>
<tr><td>1</td><td>ОК 01.</td><td>Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам</td><td rowspan="2">основные понятия математического анализа, дифференциального исчисления; основные понятия теории вероятности и математической статистики</td><td rowspan="2">применять методы математического анализа при решении профессиональных задач; дифференцировать функции; вычислять вероятности случайных величин, их числовые характеристики; по заданной выборке строить эмпирический ряд, гистограмму и вычислять статистические параметры распределения</td></tr>
<tr><td>2</td><td>ОК 02.</td><td>Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности</td></tr>
<tr><td colspan="5">Итоговая аттестация в форме зачета</td></tr>
</table>

4. СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Перечень заданий к зачету

№ пп	Практические задания	Код контролируемой компетенции
1	Вариант 1 1.Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$: 2.Найти матрицу С = АВ, если А = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 3.Даны $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти 3А+В. 4.Найти предел $\lim\limits_{x \to -2} \frac{5x^2 - 3x + 4}{x - 3}$. 5.Найти неопределённый интеграл $\int (3 - 2x + 6x^2)dx$	ОК 01.-02.
2	Вариант 2 1.Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$. 2.Найти матрицу С = АВ, если А = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 3.Даны $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. . Найти С=3А+В. 4.Найти предел: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{2x^3 - 7x + 3}$. 5. $y = \frac{x^2}{x+1}$, то $y' =$:	ОК 01.-02.
3	Вариант 3 1.Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$. 2.Найти матрицу С = АВ, если А = $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. 3.Даны $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти 3А+В. 4.Какие из данных функции являются возрастающими: **1**. $y=2^x$, **2**. y=sin x, **3**. y=tg x, **4**. $y=\log_2 x$, **5**. $y=2x^2-3x+5$. 5.Найти предел $\lim\limits_{\alpha \to 0} \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha} \right)$.	ОК 01.-02.
4	Вариант 4 1.Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ 2.Найти матрицу С = АВ, если А = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.	ОК 01.-02.

	3.Даны $A=\begin{pmatrix}10 & -2\\ 3 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти 3A+B. 4.Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{4+x}$. 5.Найдите производную функции $y=x^2+3x$ при $x=3$:	

Критерии оценивания промежуточной аттестации

Критерии оценивания при сдаче зачета

Оценка «зачтено» (56-100 баллов) предполагает: хорошее знание основных терминов и понятий курса; хорошее знание и владение методами и средствами решения задач; последовательное изложение материала курса; умение формулировать некоторые обобщения по теме вопросов; достаточно полные ответы на вопросы при сдаче экзамена; умение использовать фундаментальные понятия из базовых естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин при ответе на зачете.

Оценка «не зачтено» (менее 56 баллов) предполагает: неудовлетворительное знание основных терминов и понятий курса; неумение решать задачи; отсутствие логики и последовательности в изложении материала курса; неумение формулировать отдельные выводы и обобщения по теме вопросов; неумение использовать фундаментальные понятия из базовых естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин при ответах на зачете.

5. ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ИЛИ ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, НАВЫКОВ И (ИЛИ) ОПЫТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ В ПРОЦЕССЕ ОСВОЕНИЯ ОСНОВНОЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Перечень вопросов для входного контроля

1. Целые и рациональные**.** Действительные числа
2. Корни натуральной степени из числа и их свойства.
3. Степени с рациональными показателями, их свойства.
4. Степени с действительными показателями, их свойства.
5. Логарифм. Логарифм числа.
6. Правила действий с логарифмами**.**
7. Преобразование рациональных, иррациональных степенных выражений.
8. Преобразование показательных выражений.
9. Преобразование логарифмических выражений
10. Обратные функции. График обратной функции.
11. Область определения и множество значений; график функции
12. Построение графиков функций, заданных различными способами.
13. Степенная функция, ее свойства и график.
14. Показательная функция, ее свойства и график.
15. Логарифмическая функция, ее свойства и график.
16. Рациональные уравнения и системы. Основные приемы их решения.
17. Иррациональные уравнения. Основные приемы их решения.
18. Показательные уравнения и системы. Основные приемы их решения.
19. Логарифмические уравнения и системы. Основные приемы их решения.
20. Рациональные неравенства. Основные приемы их решения
21. Иррациональные неравенства. Основные приемы их решения
22. Показательные неравенства. Основные приемы их решения
23. Логарифмические неравенства. Основные приемы их решения.
24. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств. Метод интервалов.
25. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений и неравенства с двумя переменными и их систем.
26. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учет реальных ограничений.
27. Производная функции. Геометрический и физический смысл производной
28. Уравнение касательной к графику функции.
29. Производные суммы, разности, произведения, частного.
30. Производные основных элементарных функций

Критерии оценки входного контроля

Оценка «отлично» (86-100 баллов). Обучающийся показывает высокий уровень компетентности, знания учебного материала, раскрывает основные понятия, анализирует.

Уверенно и профессионально, грамотным языком, ясно, четко и понятно излагает состояние и суть вопроса. Обучающийся показывает высокий уровень теоретических знаний. Профессионально, грамотно, последовательно, хорошим языком четко излагает материал, аргументировано формулирует выводы.

Оценка «хорошо» (71-85 баллов). Обучающийся показывает достаточный уровень компетентности, знания учебного материала. Обучающийся показывает достаточный уровень профессиональных знаний, свободно оперирует понятиями, методами оценки принятия решений, имеет представление. Ответ построен логично, материал излагается хорошим языком, но при ответе допускает некоторые погрешности.

Оценка «удовлетворительно» (56-70 баллов). Обучающийся показывает достаточные знания учебного материала, но при ответе отсутствует должная связь между анализом, аргументацией и выводами. В ответе не всегда присутствует логика, аргументы привлекаются недостаточно веские.

Оценка «неудовлетворительно» (менее 56 баллов). Обучающийся показывает слабые знания учебного материала, низкий уровень компетентности, неуверенное изложение вопроса. Обучающийся показывает слабый уровень профессиональных знаний. Неуверенно и логически непоследовательно излагает материал. Неправильно отвечает на поставленные вопросы.

.

Комплект практических заданий

Раздел 1.

Задание 1 Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x+y-3z=0, \\ 3x+2y+2z=-1, \\ x-y+5z=2. \end{cases}$ Даны матрицы A и B. Найти C=2A-3B, D=AB $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 8 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ Найти матрицу обратную данной A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Задание 2 Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x+2y-3z=1, \\ 2x-3y-z=-7, \\ 4x+y-2z=0. \end{cases}$ Даны матрицы A и B. Найти C=5A-2B, D=BA $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ Найти матрицу обратную данной A= $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
Задание 3 Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x+3y+z=1, \\ x+y-4z=0, \quad , \\ 4x+5y-3z=1. \end{cases}$ Даны матрицы A и B. Найти C= 3B-2A, D=AB $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 8 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ Найти матрицу обратную данной A= $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	Задание 4 Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x-y+4z=2, \\ x+2y+3z=7 \quad , \\ 5x+3y+2z=8. \end{cases}$ Даны матрицы A и B. Найти C=3A-2B, D=AB $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ Найти матрицу обратную данной A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Раздел 2.

Задание 1 **1.** Вычислить предел функции: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2+x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x+3}$. **2.** Найти производные функций: а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; b) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; найти $f'(0)$. **3.** Найти интегралы а) $\int\dfrac{1-2\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$; b) $\int_0^{-2}(1-x)^2dx$; c) $\int_5^9 x\sqrt{x^2+144}\,dx$.	Задание 3 **1.** Вычислить предел функции: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2-5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-3}\right)^{2x+1}$. **2.** Найти производные функций а) $y=\dfrac{3x^2\sin x-x}{x^4}$; b) $f(x)=\ln(5-x^2)+\lg\dfrac{\pi}{6}$; найти $f'(2)$. **3.** Найти интегралы а) $\int\dfrac{e^{2x}+e^x\cos x}{e^x}dx$; b) $\int_1^2(1+2x-3x^2)dx$; c) $\int_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx$.
Задание 2 **1.** Вычислить предел функции:	Задание 4 **1.** Вычислить предел функции:

а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{(x-7)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-x^2}{4x^2-5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{3x}$. **2.** Найти производные функций а) $y=x\ln x-\dfrac{3x^2+6}{x^2}$; b) $f(x)=\ln\cos x-\sqrt{3}$; найти $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. **3.** Найти интегралы а) $\int\dfrac{2-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$; b) $\int\limits_4^9\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; с) $\int\limits_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos x\,dx$.	а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x-2x^2}{x^3-4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg3x$. **2.** Найти производные функций а) $y=\dfrac{x^4\cos x-x}{3x}+\dfrac{5}{x^2}$; b) $f(x)=\ln\cos^2 x+\sqrt{3}$; найти $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. **3.** Найти интегралы а) $\int\dfrac{2+2\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi$; b) $\int\limits_1^4\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)dx$; с) $\int\limits_{2\sqrt{2}}^4\dfrac{x}{\sqrt{x^2-7}}dx$.

Раздел 3.

Задание 1.

1 Предприятие поставляет 30 % изделий высшего сорта, 25 % - первого сорта, 20 % - второго сорта, 20 % - третьего сорта, остальное брак. Определить вероятность того, что наудачу выбранное изделие окажется бракованным или третьего сорта.

2. В магазине продается 3 телефона. Вероятность того, что они выдержат гарантийный срок, соответственно, равны: 0,91; 0,92; 0,85. Найти вероятность того, что взятый наудачу телефон выдержит гарантийный срок.

3. В озере 15000 рыб, причем 1000 из них меченные. Отловлено 120 рыб. Найти математическое ожидание и дисперсию ДСВ X – числа меченных рыб среди отловленных.

4. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно в интервале (1;9). Записать плотность вероятности f(x). Найти: M(X), D(X), и вероятность попадания X в интервал (3;6).

Задание 2.

1. Из 1200 студентов факультета 500 человек являются городскими жителями. Определить вероятность того, что наудачу выбранный студент является сельским жителем.

2. На диспетчерский пункт поступает в среднем 2 заказа в минуту на такси. Определить вероятность того, что за минуту поступит: ровно 2 заказа; не менее 2. указание: принять $e^{-2}=0{,}135$

3. Даны распределения случайных величин X и Y. Составить закон распределения произведения этих случайных величин.

X i	-1	3	4
Pi	0.4	0.2	0.4

Y i	-3	2
Pi	0.4	0.6

4. Случайная величина задана плотностью распределения вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ A\sin x, 0 \le x \le \pi \\ 0, x > \pi \end{cases}$$

Требуется:

а) Определить коэффициент А.

б) Найти интегральную функцию распределения случайной величины Х.

Задание 3.

1. Игральная кость подброшена два раза. Найти вероятность того, что а) сумма очков на верхних гранях составит 7, б) произведение очков кратно 10.

2. всхожесть зерна, хранящегося на складе равна 80 %. Отбирают случайным образом 100 зерен, определить вероятность того, что среди них: а0 число всхожих зерен будет от 68 до 90; б) доля всхожих семян будет отличаться от 0,8 по абсолютной величине не более чем на 0,1.

3. В хозяйстве 20% машин составляют полуторатонки, 50 % имеют грузоподъемность в 2т и 30 % - в 3 т. Две случайно оказавшиеся свободными машины были посланы за грузом. Его оказалось 5 т. Какова вероятность того, что посланные машины сумели его полностью забрать?

4. Непрерывная СВ Х задана дифференциальной функцией f(x) = x/5 на интервале от 0 до 5 и f(x) =0 вне указанного интервала. Найти: интегральную функцию F(X), математическое ожидание и σ.

Задание 4.

1. Игральная кость подброшена кость 3 раза. Найти вероятность того, что: а) все 3 раза выпадет четное число очков; б) четное число очков выпадет только один раз.

2. Вероятность попадания первым стрелком равна 0,7, вторым – 0,5 третьим – 0,4. найти вероятность того, что а) хотя бы один стрелок попадет в цель; б) все стрелки не попали в цель.

3. Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины Z=5X-2Y, если M(X) =100, σ(X) =5, M(Y)=20, σ(Y) =3.

4. Непрерывная случайная величина Х задана дифференциальной функцией f(x)= x/2 на интервале [0;2] и f(x) =0 вне указанного интервала. Найти: интегральную функцию F(X), математическое ожидание и σ.

Раздел 4.

Задание 1

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	3	5	7	10	12	13	24
n_i	5	16	7	13	2	9	5

Найти распределение относительных частот.

3. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	5	6	8	12	17	20	23
n_i	9	6	14	8	12	5	10

4. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	4	6	7	12	17	22
n_i	6	17	21	8	11	3

Найти распределение относительных частот и построить полигон относительных частот.

5. Построить гистограмму частот и относительных частот по данному распределению выборки

Номер интервала i	Частичный интервал x_i-x_{i+1}	Сумма частот вариант интервала n_i
1	1-6	5
2	6-11	10
3	11-16	20
4	16-21	15
5	21-26	25

Задание 2

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	1	6	7	9	10	12	13
n_i	2	4	8	2	12	6	16

Найти распределение относительных частот.

3. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	4	5	10	15	19	20	24
n_i	3	9	5	4	5	18	10

4. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	1	4	7	12	17	20
n_i	6	4	8	12	10	5

Найти распределение относительных частот и построить полигон относительных частот.

5. Построить гистограмму частот и относительных частот по данному распределению выборки

Номер интервала i	Частичный интервал x_i-x_{i+1}	Сумма частот вариант интервала n_i
1	1-4	40
2	4-7	50
3	7-10	15
4	10-13	5
5	13-16	10

Задание 3

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	3	5	7	10	17	20
n_i	6	15	18	2	11	5

Найти распределение относительных частот.

3. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	2	6	9	15	17	19	24
n_i	4	14	8	12	18	51	5

4. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	3	5	6	9	15	22	24
n_i	6	14	8	12	14	10	15

Найти распределение относительных частот и построить полигон относительных частот.

5. Построить гистограмму частот и относительных частот по данному распределению выборки

Номер интервала i	Частичный интервал x_i-x_{i+1}	Сумма частот вариант интервала n_i

1	1-3	5
2	3-5	10
3	5-7	20
4	7-9	15
5	9-11	25

Задание 4

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	1	6	7	9	11	20	24
n_i	6	14	8	12	10	5	5

Найти распределение относительных частот.

2. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	2	9	10	12	15	21	24
n_i	6	14	4	13	10	5	4

3. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	5	6	8	12	17
n_i	6	14	7	2	10

Найти распределение относительных частот и построить полигон относительных частот.

5. Построить гистограмму частот и относительных частот по данному распределению выборки

Номер интервала i	Частичный интервал x_i-x_{i+1}	Сумма частот вариант интервала n_i
1	1-5	40
2	5-9	50
3	9-13	5
4	13-17	5
5	17-21	12

Критерии оценивания

– отношение правильно выполненных заданий к общему их количеству

Шкала оценивания:

Баллы для учета в рейтинге	Оценка	Вербальный аналог
85 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 85	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

Тренинг.

Тренинг 1.

Тема: «Матрицы и определители».

В ходе решения задач по высшей математике очень часто возникает необходимость **вычислить определитель матрицы**. Определитель матрицы фигурирует в линейной алгебре, аналитической геометрии, математическом анализе и других разделах высшей математики. Таким образом, без навыка решения определителей просто не обойтись.

Определитель можно вычислить только для квадратной матрицы

На практике чаще всего можно встретить определитель второго порядка, например: $|A|=\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -15 & -2 \end{vmatrix}=?$, и определитель третьего порядка, например: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=?$.

К определителю четвертого порядка $D=\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}=?$ мы подойдём в конце занятия.

Надеюсь, всем понятно следующее: Числа внутри определителя живут сами по себе, и ни о каком вычитании речи не идет! Менять местами числа нельзя!

Таким образом, если дан какой-либо определитель, то **ничего внутри него не трогаем!**

Обозначения: Если дана матрица $A=\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -15 & -2 \end{pmatrix}$, то ее определитель обозначают $|A|$. Также очень часто определитель обозначают латинской буквой D или греческой Δ.

1) **Что значит решить (найти, раскрыть) определитель?** Вычислить определитель – это значит НАЙТИ ЧИСЛО. Знаки вопроса $?$ в вышерассмотренных примерах – это совершенно обыкновенные числа.

2) Теперь осталось разобраться в том, **КАК найти это число?** Для этого нужно применить определенные правила, формулы и алгоритмы, о чём сейчас и пойдет речь.

Начнем с определителя «два» на «два»:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

ЭТО НУЖНО ЗАПОМНИТЬ, по крайне мере на время изучения высшей математики.

Сразу рассмотрим пример:

$$\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -15 & -2 \end{vmatrix}=11\cdot(-2)-(-15)\cdot(-3)=-22-45=-67$$

Самое главное, НЕ ЗАПУТАТЬСЯ В ЗНАКАХ.

Определитель матрицы «три на три» можно раскрыть 8 способами, 2 из них простые и 6 - нормальные.

Начнем с двух простых способов

Аналогично определителю «два на два», определитель «три на три» можно раскрыть с помощью формулы:

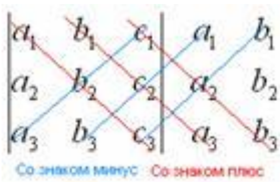
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 9 + (-7)\cdot(-2)\cdot 6 + 4\cdot 8\cdot 3 - (-7)\cdot 0\cdot 3 - 1\cdot 8\cdot 6 - 4\cdot(-2)\cdot 9 =$$

$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

Формула длинная и допустить ошибку по невнимательности проще простого. Как избежать досадных промахов? Для этого придуман второй способ вычисления определителя, который фактически совпадает с первым. Называется он способом Саррюса или способом «параллельных полосок».
Суть состоит в том, что справа от определителя приписывают первый и второй столбец и аккуратно карандашом проводят линии:



Множители, находящиеся на «красных» диагоналях входят в формулу со знаком «плюс».
Множители, находящиеся на «синих» диагоналях входят в формулу со знаком минус:

<u>Пример:</u>

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ -7 & 8 & 9 & -7 & 8 \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 9 + (-2)\cdot 6\cdot(-7) + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 0\cdot(-7) - 1\cdot 6\cdot 8 - (-2)\cdot 4\cdot 9 =$$

$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

Сравните два решения. Нетрудно заметить, что это ОДНО И ТО ЖЕ, просто во втором случае немного переставлены множители формулы, и, самое главное, вероятность допустить ошибку значительно меньше.

<u>Теперь рассмотрим шесть нормальных способов для вычисления определителя</u>

Почему нормальных? Потому что в подавляющем большинстве случаев определители требуется раскрывать именно так.

Как Вы заметили, у определителя «три на три» три столбца и три строки. Решить определитель можно, раскрыв его **по любой строке или по любому столбцу**. Таким образом, получается 6 способов, при этом во всех случаях используется **однотипный** алгоритм.

Определитель матрицы равен сумме произведений элементов строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

В следующем примере будем раскрывать определитель **по первой строке**.

Для этого нам понадобится матрица знаков: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$. Легко заметить, что знаки расположены в шахматном порядке.

Сначала я приведу полное решение. Снова берем наш подопытный определитель и проводим вычисления:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (0 \cdot 9 - 8 \cdot 6) + 2 \cdot (4 \cdot 9 - (-7) \cdot 6) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - (-7) \cdot 0) =$$

$$= 0 - 48 + 2 \cdot (36 + 42) + 3 \cdot (32 - 0) = -48 + 156 + 96 = 204$$

И главный вопрос: КАК из определителя «три на три» получить вот это вот:

$$+1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}?$$

Итак, определитель «три на три» сводится к решению трёх маленьких определителей, или как их еще называют, **МИНОРОВ**. Термин рекомендую запомнить, тем более, он запоминающийся: минор – маленький.

Коль скоро выбран способ разложения определителя **по первой строке**, очевидно, что всё вращается вокруг неё:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Элементы обычно рассматривают слева направо (или сверху вниз, если был бы выбран столбец)

Поехали, сначала разбираемся с первым элементом строки, то есть с единицей:

1) Из матрицы знаков выписываем соответствующий знак:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +$$

2) Затем записываем сам элемент:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1$$

3) МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором стоит первый элемент:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Оставшиеся четыре числа и образуют определитель «два на два», который называется **МИНОРОМ** данного элемента (единицы).

Переходим ко второму элементу строки.

4) Из матрицы знаков выписываем соответствующий знак:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} -$$

5) Затем записываем второй элемент:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (-2)$$

6) МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором стоит второй элемент:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix}$$

Оставшиеся четыре числа записываем в маленький определитель.
7) Из матрицы знаков выписываем соответствующий знак:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} +$$

8) Записываем третий элемент:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} + 3$$

9) МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором стоит третий элемент:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}$$

Оставшиеся четыре числа записываем в маленький определитель.

Аналогично определитель можно разложить по любой строке или по любому столбцу. Естественно, во всех шести случаях ответ получается одинаковым.

Определитель «четыре на четыре» можно вычислить, используя этот же алгоритм. При этом матрица знаков у нас увеличится:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

В следующем примере я раскрыла определитель **по четвертому столбцу**:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= -8\cdot\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & -7 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} + (-6)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ 2 & -5 & -7 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} + (-6)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

А как это получилось, попробуйте разобраться самостоятельно, правильный ответ: 18. Для тренировки лучше раскрыть определитель по какому-нибудь другому столбцу или другой строке.

Тренинг 2.

Тема: «Действия над комплексными числами».

Алгебраическая форма комплексного числа.
Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел

С алгебраической формой комплексного числа мы уже познакомились,

$z = a + bi$ – это и есть алгебраическая форма комплексного числа. Существуют еще **тригонометрическая** и **показательная форма** комплексных чисел.

Действия с комплексными числами не представляют особых сложностей и мало чем отличаются от обычной алгебры.

Сложение комплексных чисел

Пример 1

Сложить два комплексных числа $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 4 - 5i$

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части:

$$z_1 + z_2 = 1 + 3i + 4 - 5i = 5 - 2i$$

Для комплексных чисел справедливо правило первого класса: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – **от перестановки слагаемых сумма не меняется**.

Вычитание комплексных чисел

Пример 2

Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + 5i$

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$$z_1 - z_2 = -2 + i - (\sqrt{3} + 5i) = -2 + i - \sqrt{3} - 5i = -2 - \sqrt{3} - 4i$$

Результат не должен смущать, у полученного числа две, а не три части. Просто действительная часть – составная: $-2 - \sqrt{3}$. Для наглядности ответ можно переписать так: $z_1 - z_2 = (-2 - \sqrt{3}) - 4i$.

Рассчитаем вторую разность: $z_2 - z_1 = \sqrt{3} + 5i - (-2 + i) = \sqrt{3} + 5i + 2 - i = 2 + \sqrt{3} + 4i$

Здесь действительная часть тоже составная: $2 + \sqrt{3}$

Чтобы не было какой-то недосказанности, приведу короткий пример с «нехорошей» мнимой частью: $-1 + \sqrt{2}i + 7 - 3i = 6 + (\sqrt{2} - 3)i$. Вот здесь без скобок уже не обойтись.

Умножение комплексных чисел

Познакомимся со знаменитым равенством:

$$i^2 = -1$$

Пример 3

Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 6i$

Очевидно, что произведение следует записать так: $z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i)$

Необходимо раскрыть скобки по правилу умножения многочленов. Так и нужно сделать! Все алгебраические действия вам знакомы, главное, помнить, что $i^2 = -1$ и быть внимательным**.**

Чтобы умножить многочлен на многочлен нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена.

Распишем подробно: $z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i) = 1 \cdot 3 - i \cdot 3 + 1 \cdot 6i - i \cdot 6i = 3 - 3i + 6i + 6 = 9 + 3i$

Надеюсь, всем было понятно, что $-i \cdot 6i = -6i^2 = -6 \cdot (-1) = +6$

Внимание, и еще раз внимание, чаще всего ошибку допускают в знаках.

Как и сумма, **произведение комплексных чисел перестановочно**, то есть справедливо равенство: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Деление комплексных чисел

Пример 4

Даны комплексные числа $z_1 = 13 + i$, $z_2 = 7 - 6i$. Найти частное $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Составим частное: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{13+i}{7-6i}$

Деление чисел осуществляется **методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение**.

Вспоминаем знаменитую формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ и смотрим на наш знаменатель: $7-6i$

В знаменателе уже есть $(a-b)$, поэтому сопряженным выражением в данном случае является $(a+b)$, то есть $7+6i$

Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на $7+6i$, и, чтобы ничего не изменилось, домножить числитель на то же самое число $7+6i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$$

Далее в числителе нужно раскрыть скобки (перемножить два числа по правилу, рассмотренному в предыдущем пункте). А в знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ (помним, что $i^2 = -1$ и не путаемся в знаках!!!).

Распишем подробно:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)} = \frac{91+7i+78i+6i^2}{7^2-(6i)^2} = \frac{91+7i+78i-6}{49-(-36)} =$$

$$= \frac{85+85i}{49+36} = \frac{85+85i}{85} = 1+i$$

В ряде случаев перед делением дробь целесообразно упростить, например, рассмотрим частное чисел: $\dfrac{-7-12i}{-12+7i}$.

Перед делением избавляемся от лишних минусов: в числителе и в знаменателе выносим минусы за скобки и сокращаем эти минусы: $\dfrac{-7-12i}{-12+7i} = \dfrac{-(7+12i)}{-(12-7i)} = \dfrac{7+12i}{12-7i}$.

Необходимо найти конечный ответ.

Пример 5

Дано комплексное число $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}+i}$. Записать данное число в алгебраической форме (т.е. в форме $a+bi$).

Приём тот же самый – умножаем знаменатель и числитель на сопряженное знаменателю выражение. Снова смотрим на формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. В знаменателе уже есть $(a+b)$, поэтому знаменатель и числитель нужно домножить на сопряженное выражение $(a-b)$, то есть на $\sqrt{3}-i$:

$$z=\frac{1}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3})^2-(i)^2}=\frac{\sqrt{3}-i}{3+1}=\frac{\sqrt{3}-i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$$

<u>Пример 6</u>

Даны два комплексных числа $z_1=5+2i$, $z_2=2-5i$. Найти их сумму, разность, произведение и частное.

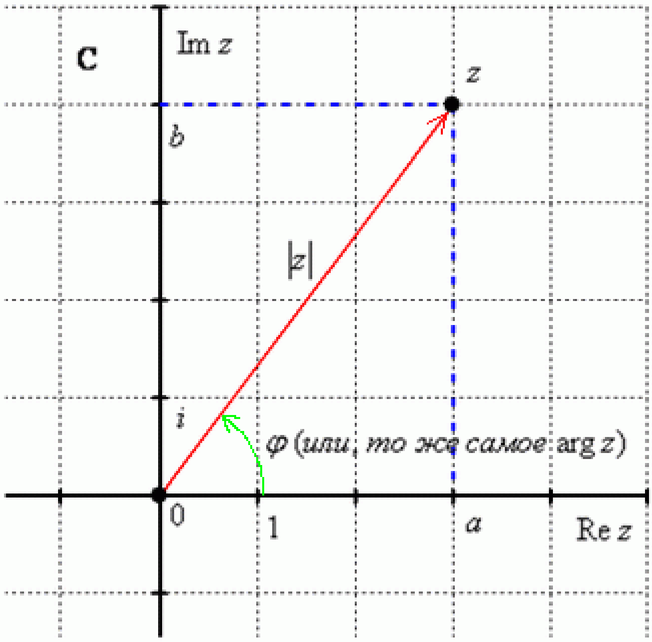
Это пример для самостоятельного решения.

Будьте внимательны, соблюдайте правила алгебры, обычный алгебраический порядок действий, и помните, что $i^2=-1$

Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

Любое комплексное число (кроме нуля) $z=a+bi$ можно записать в тригонометрической форме: $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $|z|$ – это **модуль комплексного числа**, а φ – **аргумент комплексного числа**.

Изобразим на комплексной плоскости число $z=a+bi$. Для определённости и простоты объяснений расположим его в первой координатной четверти, т.е. считаем, что $a>0, b>0$:



Модулем комплексного числа z называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, **модуль – это длина** радиус-вектора, который на чертеже обозначен красным цветом.

Модуль комплексного числа z стандартно обозначают: $|z|$ или r

По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Данная формула справедлива **для любых** значений «a» и «b».

*Примечание: модуль комплексного числа представляет собой обобщение понятия **модуля действительного числа**, как расстояния от точки до начала координат.*

Аргументом комплексного числа z называется **угол** φ между <u>положительной полуосью</u> действительной оси $\operatorname{Re} z$ и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке. Аргумент не определён для единственного числа: $z = 0$.

Рассматриваемый принцип фактически схож с **полярными координатами**, где полярный радиус и полярный угол однозначно определяют точку.

Аргумент комплексного числа z стандартно обозначают: φ или $\arg z$

Из геометрических соображений получается следующая формула для нахождения аргумента:

$$\arg z = arctg\frac{b}{a}.$$

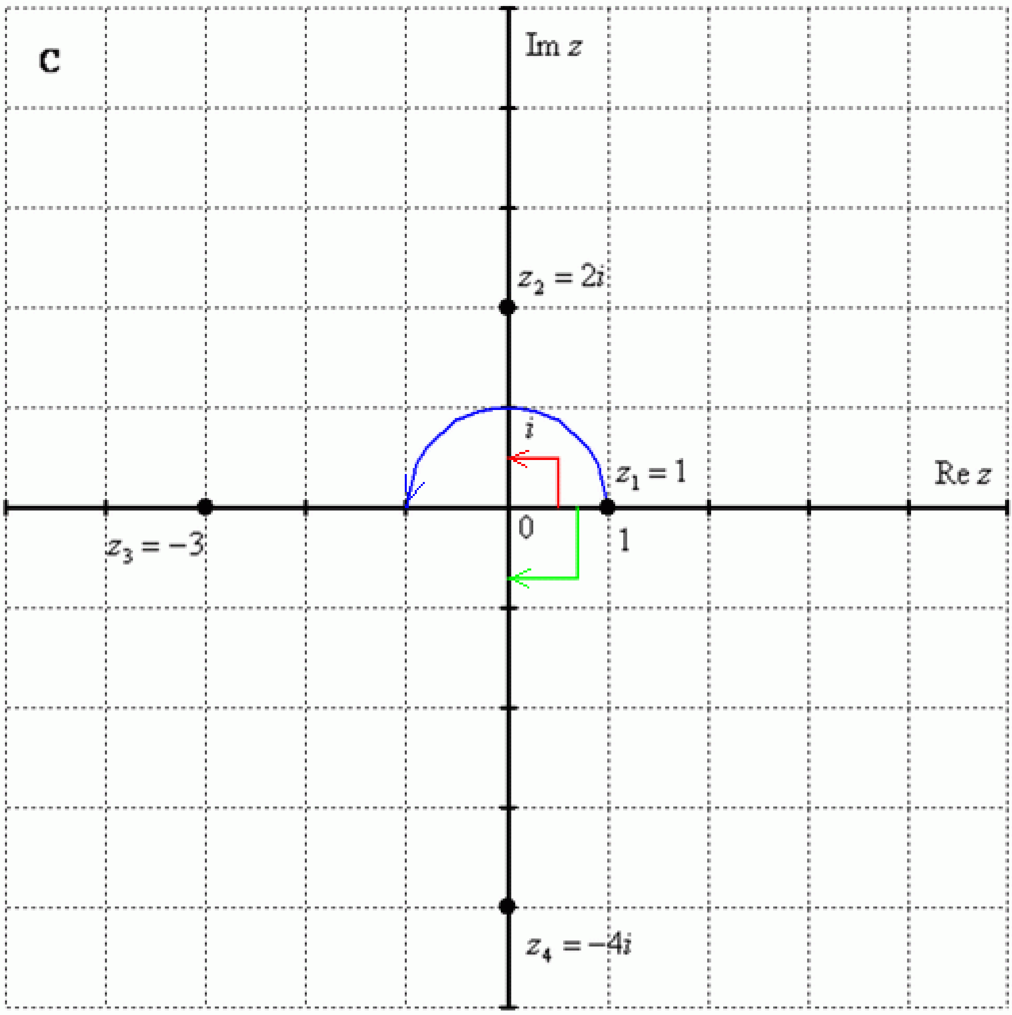
Внимание! Данная формула работает только в правой полуплоскости! Если комплексное число располагается не в 1-й и не 4-й координатной четверти, то формула будет немного другой. Эти случаи мы тоже разберем.

Но сначала рассмотрим простейшие примеры, когда комплексные числа располагаются на координатных осях.

<u>Пример 7</u>

Представить в тригонометрической форме комплексные числа: $z_1 = 1$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -3$, $z_4 = -4i$.

Выполним чертёж:



Для наглядности перепишу тригонометрическую форму комплексного числа: $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Запомним намертво, модуль – **длина** (которая всегда <u>неотрицательна</u>), аргумент – **угол**.

1) Представим в тригонометрической форме число $z_1 = 1$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_1| = 1$. Формальный расчет по формуле: $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$. Очевидно, что $\varphi_1 = 0$ (число лежит непосредственно на действительной положительной полуоси). Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_1 = \cos 0 + i\sin 0$.

Ясно обратное проверочное действие: $z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$

2) Представим в тригонометрической форме число $z_2 = 2i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_2| = 2$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Очевидно, что $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ (или 90 градусов). На чертеже угол обозначен красным цветом. Таким образом, число в тригонометрической форме:

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Используя *таблицу значений тригонометрических функций*, легко обратно получить алгебраическую форму числа (заодно выполнив проверку):

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i$$

3) Представим в тригонометрической форме число $z_3 = -3$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_3| = 3$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_3| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Очевидно, что $\varphi_3 = \pi$ (или 180 градусов). На чертеже угол обозначен синим цветом. Таким образом, число в тригонометрической форме:

$$z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Проверка: $z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3(-1 + i \cdot 0) = -3$

4) И четвёртый интересный случай. Представим в тригонометрической форме число $z_4 = -4i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_4| = 4$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_4| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Аргумент можно записать двумя способами: Первый способ: $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$

(270 градусов), и, соответственно:

$$z_4 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Проверка: $$z_4 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 4(0 + i\cdot(-1)) = -4i$$

Однако более стандартно следующее правило: **Если угол больше 180 градусов**, то его записывают со знаком минус и противоположной ориентацией («прокруткой») угла: $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ (минус 90 градусов), на чертеже угол отмечен зеленым цветом. Легко заметить, что $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ и $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ – это один и тот же угол.

Таким образом, запись принимает вид:

$$z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Внимание! Ни в коем случае нельзя использовать четность косинуса, нечетность синуса и проводить дальнейшее «упрощение» записи:

$$z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \cancel{\neq 4\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$$

В оформлении простейших примеров так и следует записывать*: «очевидно, что модуль равен… очевидно, что аргумент равен...»*. Это действительно очевидно и легко решается устно.

Перейдем к рассмотрению более распространенных случаев. С модулем проблем не возникает, всегда следует использовать формулу $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

А вот формулы для нахождения аргумента будут разными, это зависит от того, в какой координатной четверти лежит число $z = a + bi$.

При этом возможны три варианта:

1) Если $a > 0$ (1-я и 4-я координатные четверти, или правая полуплоскость), то аргумент нужно находить по формуле

$$\arg z = arctg\frac{b}{a}.$$

2) Если $a < 0, b > 0$ (2-я координатная четверть), то аргумент нужно находить по формуле

$$\arg z = \pi + arctg\frac{b}{a}.$$

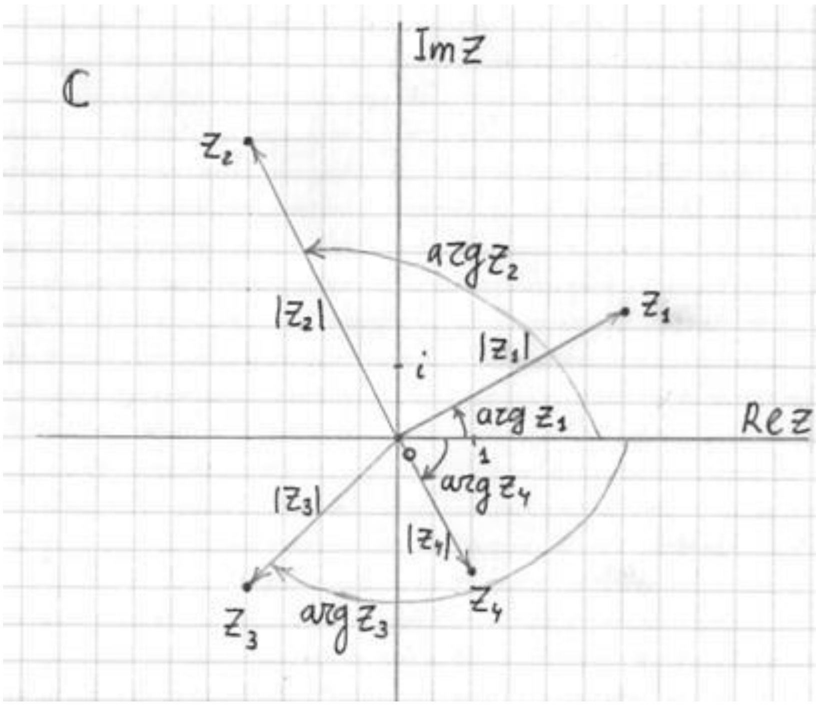
3) Если $a < 0, b < 0$ (3-я координатная четверть), то аргумент нужно находить по формуле

$$\arg z = -\pi + arctg\frac{b}{a}.$$

Пример 8

Представить в тригонометрической форме комплексные числа: $z_1 = 3+\sqrt{3}i$ $z_2 = -2+4i$, $z_3 = -2-2i$, $z_4 = 1-\sqrt{3}i$.

Коль скоро есть готовые формулы, то чертеж выполнять не обязательно. Но есть один момент: когда вам предложено задание представить число в тригонометрической форме, то **чертёж лучше в любом случае выполнить**.



Я представлю в комплексной форме числа z_2 и z_4, первое и третье числа будут для самостоятельного решения.

Представим в тригонометрической форме число $z_2 = -2+4i$. Найдем его модуль и аргумент.

$$|z_2| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Поскольку $a<0, b>0$ (случай 2), то

$$\arg z_2 = \pi + arctg\frac{b}{a} = \pi + arctg\frac{4}{-2} = \pi + arctg(-2) = \pi - arctg 2$$

– вот здесь нечетностью арктангенса воспользоваться нужно. К сожалению, в таблице отсутствует значение $arctg 2$, поэтому в подобных случаях аргумент приходится оставлять в громоздком виде:

$z_2 = 2\sqrt{5}\left(\cos(\pi - arctg 2) + i\sin(\pi - arctg 2)\right)$ – число z_2 в тригонометрической форме.

Способ проверки. Если вы будете выполнять чертеж на клетчатой бумаге в том масштабе, который у меня (1 ед. = 1 см), то можно взять линейку и измерить модуль в сантиметрах. Если есть транспортир, то можно непосредственно по чертежу измерить и угол.

Перечертите чертеж в тетрадь и измерьте линейкой расстояние от начала координат до числа z_2. Вы убедитесь, что действительно

$$|z_2| = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47\ см$$.

Также транспортиром можете измерить угол и убедиться, что действительно

$\arg z_2 = \pi - arctg 2 \approx 117°$.

Представим в тригонометрической форме число $z_4 = 1 - \sqrt{3}i$. Найдем его модуль и аргумент.

$|z_4| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

Поскольку $a > 0$ (случай 1), то

$\arg z_4 = arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{-\sqrt{3}}{1} = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$ (минус 60 градусов).

Таким образом: $z_4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ – число z_4 в тригонометрической форме.

А вот здесь, как уже отмечалось, минусы не трогаем.

Кроме графического метода проверки, существует и проверка аналитическая, которая уже проводилась в Примере 7.

Используем *таблицу значений тригонометрических функций*, при этом учитываем, что угол $-\frac{\pi}{3}$ – это в точности табличный угол $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ (или 300 градусов): $z_4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 1 - \sqrt{3}i$ – число z_4 в исходной алгебраической форме.

Числа $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ и $z_3 = -2 - 2i$ представьте в тригонометрической форме самостоятельно.

В конце параграфа кратко о показательной форме комплексного числа.

Любое комплексное число (кроме нуля) $z = a + bi$ можно записать в показательной форме: $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, где $|z|$ – это модуль комплексного числа, а φ – аргумент комплексного числа.

Что нужно сделать, чтобы представить комплексное число в показательной форме? Почти то же самое: выполнить чертеж, найти модуль и аргумент. И записать число в виде:

$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$.

Например, для числа $z_2 = -2 + 4i$ предыдущего примера у нас найден модуль и аргумент: $|z_2| = 2\sqrt{5}$, $\arg z_2 = \pi - arctg 2$. Тогда данное число в показательной форме запишется следующим образом:

$z_2 = 2\sqrt{5} \cdot e^{i(\pi - arctg 2)}$.

Число $z_4 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ в показательной форме будет выглядеть так:

$z_4 = 2 \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

Число $z_1 = 3+\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ – так:

$$z_1 = 2\sqrt{3}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$$

И т.д.

Единственный совет – **не трогаем показатель** экспоненты, там не нужно переставлять множители, раскрывать скобки и т.п. Комплексное число в показательной форме записывается **строго** по форме

$$z = |z|\cdot e^{i\varphi}.$$

Возведение комплексных чисел в степень

Пример 9

Возвести в квадрат комплексное число $z = 2+3i$

Здесь можно пойти двумя путями, первый способ это переписать степень как произведение множителей

$$z^2 = (2+3i)^2 = (2+3i)(2+3i)$$

и перемножить числа по правилу умножения многочленов.

Второй способ состоит в применение известной школьной формулы сокращенного умножения $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$z^2 = (2+3i)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 3i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$$

Для комплексного числа легко вывести свою формулу сокращенного умножения:

$$(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2.$$

Аналогичную формулу можно вывести для квадрата разности, а также для куба суммы и куба разности.

Что делать, если комплексное число нужно возвести, скажем, в 5-ю, 10-ю или 100-ю степень? Ясно, что в алгебраической форме проделать такой трюк практически невозможно.

И здесь на помощь приходит тригонометрическая форма комплексного числа и, так называемая, **формула Муавра**: Если комплексное число представлено в тригонометрической форме $z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то при его возведении в натуральную степень n справедлива формула:

$$z^n = |z|^n\cdot(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Данная формула следует из **правила умножения комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме**: чтобы найти произведение чисел $z_1 = |z_1|\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ нужно перемножить их модули и сложить аргументы:

$$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Аналогично для показательной формы:

если $z_1 = |z_1|\cdot e^{i\varphi_1},\quad z_2 = |z_2|\cdot e^{i\varphi_2}$, то: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

<u>Пример 10</u>

Дано комплексное число $z = 3+\sqrt{3}i$, найти z^{20}.

Сначала нужно представить данное число в тригонометрической форме.

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Тогда, по формуле Муавра:

$$z^{20} = (2\sqrt{3})^{20}\cdot\left(\cos\left(20\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(20\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) = (2\sqrt{3})^{20}\cdot\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

Угол в большинстве случае следует упростить. Как упростить?

Образно говоря, нужно избавиться от лишних оборотов.

Один оборот составляет 2π радиан или 360 градусов.

Выясним сколько у нас оборотов в аргументе $\frac{10\pi}{3}$.

Для удобства делаем дробь правильной:

$$\frac{10\pi}{3} = 3\frac{1}{3}\pi,$$

после чего становится хорошо видно, что можно убавить один оборот:

$$\frac{10\pi}{3} - 2\pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Надеюсь всем понятно, что $\frac{10\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ – это один и тот же угол.

Таким образом, окончательный ответ запишется так:

$$z^{20} = (2\sqrt{3})^{20}\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

Любители стандартов везде и во всём могут переписать ответ в виде:

$$z^{20} = (2\sqrt{3})^{20}\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

(т.е. убавить еще один оборот и получить значение аргумента в стандартном виде).

Хотя $z^{20} = (2\sqrt{3})^{20}\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ – ни в коем случае не ошибка.

<u>Пример 11</u>

Дано комплексное число $z = 1-\sqrt{3}i$, найти z^{30}. Полученный аргумент (угол) упростить, результат представить в алгебраической форме.

<u>Это пример для самостоятельного решения</u>.

Отдельная разновидность задачи возведения в степень – это возведение в степень чисто мнимых чисел.

Пример 12

Возвести в степень комплексные числа i^{10}, i^{33}, $(-i)^{21}$

Если мнимая единица возводится в четную степень, то техника решения такова:

$$i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1$$

Если мнимая единица возводится в нечетную степень, то «отщипываем» одно «и», получая четную степень:

$$i^{33} = i \cdot i^{32} = i \cdot (i^2)^{16} = i \cdot (-1)^{16} = i \cdot 1 = i$$

Если есть минус (или любой действительный коэффициент), то его необходимо предварительно отделить:

$$(-i)^{21} = (-1)^{21} \cdot i^{21} = -i \cdot i^{20} = -i \cdot (i^2)^{10} = -i \cdot (-1)^{10} = -i$$

Пример 13

Возвести в степень комплексные числа $(-2i)^7$, $\left(\frac{i}{2}\right)^8$

Это пример для самостоятельного решения.

Извлечение корней из комплексных чисел.
Квадратное уравнение с комплексными корнями.

Рассмотрим пример:

$$z = \sqrt{-4}$$

Нельзя извлечь корень? Если речь идет о действительных числах, то действительно нельзя. В комплексных числах извлечь корень – можно! А точнее, два корня:

$$z_1 = \sqrt{-4} = -2i$$
$$z_2 = \sqrt{-4} = 2i$$

Действительно ли найденные корни являются решением уравнения $z^2 = -4$? Выполним проверку:

$$(-2i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$$
$$(2i)^2 = 2^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$$

Что и требовалось проверить.

Часто используется сокращенная запись, оба корня записывают в одну строчку под «одной гребёнкой»: $z_{1,2} = \pm 2i$.

Такие корни также называют *сопряженными комплексными корнями*.

Как извлекать квадратные корни из отрицательных чисел, думаю, всем понятно:

$\sqrt{-1} = \pm i$, $\sqrt{-9} = \pm 3i$, $\sqrt{-36} = \pm 6i$, $\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$, $\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}i$ и т.д.

Во всех случаях получается два сопряженных комплексных корня.

Пример 14

Решить квадратное уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$

Вычислим дискриминант:
$D = 36 - 136 = -100$

Дискриминант отрицателен, и в действительных числах уравнение решения не имеет. Но корень можно извлечь в комплексных числах!
$\sqrt{D} = \pm 10i$

По известным формулам получаем два корня:
$z_{1,2} = \dfrac{6 \pm 10i}{2}$

$z_{1,2} = 3 \pm 5i$ – сопряженные комплексные корни

Таким образом, уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$ имеет два сопряженных комплексных корня: $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 3 + 5i$

Нетрудно понять, что в *поле комплексных чисел* «школьное» квадратное уравнение всегда при двух корнях! И вообще, любое уравнение вида

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

имеет ровно n комплексных корней, часть которых (или все) могут быть действительными.

Пример 15

Найти корни уравнения $4z^2 + 1 = 0$ и разложить квадратный двучлен на множители.

Решить самостоятельно.

Критерии оценивания

– отношение правильно выполненных заданий к общему их количеству

Шкала оценивания:

Баллы для учета в рейтинге	Оценка	Вербальный аналог
85 ÷ 100	5	отлично
70 ÷ 85	4	хорошо
50 ÷ 69	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

Лист регистрации изменений

Номер изменения	Дата внесения изменения	Кем утверждено	Примечание